MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 6

1. Podrobně sepište důkazy (i třeba již naznačené na cvičení) aspoň jednoho z následujících tvrzení:

   a) Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ a>0$, pak je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. (A zvažte, zda tvrzení platí i pro $a=0$ $(a_n>0)$.

   b) Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ a\in R$ a nechť platí $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0 \forall n>n_0 : |a_n - b_n| < \varepsilon$. Potom také $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

2. Promyslete následující tvrzení a pokuste se aspoň jedno tvrzení dokázat:

   a) Je-li $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = a,\ a<1$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   b) Je-li $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a,\ a<1$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   c) Je-li $a_n>0,\ n\in N$ a $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = a,\ a>1$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

   d) Je-li $a_n>0,\ n\in N$ a $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a,\ a>1$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

   A ukažte si, jak snadno se pak pomocí tvrzení a) nebo b) z příkladu 2. dokáže, že

   a) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!} = 0$ pro každé $x\in R$; b) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{n!} = 0$; c) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n} = 0$ $(a>1)$; d) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n} = 0$.

3. Víte-li, že $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, zkuste vypočítat následující limity:

   a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}$; b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$; c) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$; d) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.